MIARY LOKALIZOWALNE

Def: Miara μ jest <u>ściśle lokalizowalna</u> lub <u>rozkładalna</u> jeżeli $\Omega = \bigsqcup_{i \in I} \Omega_i$ dla pewnej rodziny $\{\Omega_i\}_{i \in I} \subseteq \Sigma$ takiej, że

Zbiór I jest dowolny, niekoniecznie przeliczalny

1) $\forall_{i \in I} \ \mu(\Omega_i) < \infty$

2) $\forall_{A \in \Sigma} \ \mu(A) = \sum_{i \in I} \mu(A \cap \Omega_i)$

3) $\Sigma = \{A \subseteq \Omega : \forall_{i \in I} \ A \cap \Omega_i \in \Sigma\}$

$\forall_{i \in I} \ A \cap \Omega_i \in \Sigma \Rightarrow A \in \Sigma$

Uwaga: Jeżeli zbiór I powyżej jest przeliczalny to warunki 2) i 3) zachodzą automatycznie i wtedy powyższa def. sprowadza się do definicji miary σ-skończonej

ZAD. Pokazać, że μ - rozkładalna $\Leftrightarrow$ suma prosta miar skończonych.

μ - skończona $\Rightarrow$ μ - rozkładalna $\overset{1),2)}{\Longrightarrow}$ μ - semi-skończona

Def. Miara μ jest <u>lokalizowalna</u> $\Leftrightarrow$

Def: Miara μ jest <u>lokalizowalna</u> $\iff$

μ jest semi-skończona oraz dla każdej rodziny $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \Sigma$ istnieje „supremum istotne" w Σ

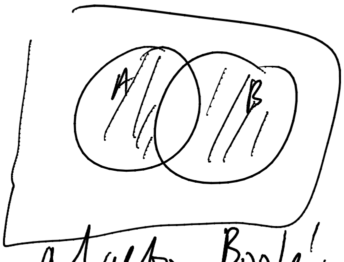
tzn. $A \in \Sigma$ t. że

i) $\forall_{i \in I} \; \mu(A_i \setminus A) = 0$

ii) Jeśli $B \in \Sigma$ oraz $\forall_{i\in I} \; \mu(A_i \setminus B) = 0$, to $\mu(A \setminus B) = 0$.

Uwaga: „Supremum istotne" jest wyznaczone jednoznacznie z dokładnością do zb. miary zero. Wtedy

$$A \sim B \overset{def}{\iff} \mu(A \triangle B) = 0$$



Przestrzeń ilorazowa $\Sigma/_\sim$ jest σ-zupełną algebrą Boole'a gdzie

$[A] \wedge [B] = [A \cap B]$ $\qquad [\emptyset] = 0$

$[A] \vee [B] = [A \cup B]$ $\qquad [\Omega] = 1$

$[A]^c = [\Omega \setminus A]$

$\Sigma/_\sim$ jest σ-zupełna $\iff \forall_{\{[A_n]\}_{n=1}^{\infty}} \; \bigvee_{n=1}^{\infty} [A_n] = [\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n] \in \Sigma/_\sim$

μ jest lokalizowany $\Rightarrow$ krata $\Sigma/_\sim$ jest zupełna, tzn. ("σ-addytywność")

$$\forall_{\{A_i\}_{i\in I}} \bigvee_{i\in I} [A_i] \in \Sigma/_\sim$$

$\boxed{\text{STW.}}$ Jeśli μ jest rozkładalna (ściśle lokalizowalna) to jest lokalizowalna.

Dowód: Niech μ rozkładalna. Wtedy μ semi-skończona (jak w $\boxed{\text{II}}$).

Niech $\Omega = \bigcup_{i\in I} \Omega_i$, $\mu(\Omega_i)<\infty$, $\forall_{A\in\Sigma}$ $\mu(A)=\sum_{i\in I}\mu(A\cap\Omega_i)$, ...

Niech $\{A_j\}_{j\in J} \subseteq \Sigma$ dow. rodzina zbiorów.

Połóżmy

$$\mathcal{F} := \{B\in\Sigma : \forall_{j\in J}\ \mu(B\cap A_j)=0\}$$

$\mathcal{F}$ jest σ-pierścieniem

Dla każdego $i\in I$ wybierzmy ciąg $\{B_{i,n}\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{F}$ taki, że

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_{i,n}) = \sup_{B\in\mathcal{F}} \mu(B\cap\Omega_i)$$

$n \cdot$ DEF

Wtedy

$$B_i := \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{i,n}$$

mamy $B_i \in \mathcal{F}$ oraz $\mu(B_i \cap \Omega_i) = \sup_{B \in \mathcal{F}} \mu(B \cap \Omega_i)$

Skoro $\Sigma = \{A \subseteq \Omega : \forall_{i \in I}\ A \cap \Omega_i \in \Sigma\}$, to

$$B := \bigcup_{i \in I} \underbrace{B_i \cap \Omega_i}_{\in \Sigma} \in \Sigma$$

Połóżmy

$$A := \Omega \setminus B \in \Sigma$$

i) $\forall_{j \in J}$ $\mu(A_j \setminus A) = \mu(A_j \cap B) \overset{2)}{=} \sum_{i \in I} \mu(A_j \cap B \cap \Omega_i)$

$$= \sum_{i \in I} \underbrace{\mu(A_j \cap B_i \cap \Omega_i)}_{\leq \mu(A_j \cap B_i) = 0} = \left\{ \begin{array}{l} B_i \in \mathcal{F} \\ \mu(A_j \cap B_i) = 0 \end{array} \right.$$

$$= 0.$$

W szczególności $B \in \mathcal{F}$.

ii) Niech $C \in \Sigma$ taki, że $\forall_{j \in J}\ \mu(A_j \setminus C) = 0$.

Wtedy $D := \Omega \setminus C \in \mathcal{F}$ $\left(\mu(A_i \cap D) = \mu(A_i \setminus C) = 0 \right)$

i stąd

$$B \cup D \in \mathcal{F}.$$

$$\underset{\mathcal{F}}{\uparrow} \qquad \underset{\mathcal{F}}{\uparrow}$$

Zatem dla każdego $i \in I$ mamy

$$\mu((\underset{\uparrow_{\mathcal{F}}}{B \cup D}) \cap \Omega_i) \leq \sup_{E \in \mathcal{F}} \mu(E \cap \Omega_i) = \mu(B_i \cap \Omega_i) =$$

$$= \mu(B \cap \Omega_i)$$

Czyli $\mu((B \cup D) \cap \Omega_i) = \mu(B \cap \Omega_i)$. Stąd

$$\mu(B \cap \cancel{\Omega_i}) + \mu(D \setminus B \cap \Omega_i) = \mu(B \cancel{\cap} \Omega_i)$$

i skoro $\mu(\Omega_i) < \infty$ to $\boxed{\mu(D \setminus B \cap \Omega_i) = 0.}$

Zatem

$$\mu(D \setminus B) \overset{2)}{=} \sum_{i \in I} \mu(D \setminus B \cap \Omega_i) = 0.$$

Stąd

$$\mu(A \setminus C) = \mu(A \cap D) = \mu(D \setminus B) = 0. \blacksquare$$

TW. RADONA-NIKODYMA

TW. RADONA - NIKODYMA

TW (R-N1 dla miar skończonych)

Niech ν, μ miary skończone na pr. mierz. (Ω, Σ)

$$\nu \ll \mu \iff \exists_{f_0 \in L_1(\mu)} \forall_{A \in \Sigma} \; \nu(A) = \int_A f_0 \, d\mu$$

(tzn. dla każdego $A \in \Sigma$, $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$)

Ponadto $f_0 \in L_1(\mu)$ jest wyznaczone jednoznacznie, $f \geq 0$, oraz

$$\forall_{f \in L_1(\nu)} \int_\Omega f \, d\nu = \int_\Omega f \cdot f_0 \, d\mu$$

Dlatego też piszemy $d\nu = f_0 \, d\mu$ lub też

$f_0 = \frac{d\nu}{d\mu}$ ← Pochodna RADONA-NIKODYMA

Dowód: TEORIA MIARY i CAŁKI.

TW. (R-N2 - dla miar σ-skończonych)

Niech ν, μ miary σ-skończone na (Ω, Σ).

Jeśli $\nu \ll \mu$, to istnieje funkcja mierzalna

$f_0 : \Omega \to [0, +\infty)$ taka, że

$$\forall_{A \in \Sigma} \quad \nu(A) = \int_A f_0 \, d\mu$$

Ponadto f_0 jest wyznaczona jednoznacznie μ-p.w.

Dowód: Jako, że ν, μ są σ-skończone, to istnieje „wspólny rozkład" $\Omega = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, na zbiory mierzalne takie, że $\mu(\Omega_i) < \infty$ i $\nu(\Omega_i) < \infty$, dla $i=1,\dots)$

Stosując Tw. 1 do każdego zbioru Ω_i otrzymujemy funkcję $f_i : \Omega_i \longmapsto [0, +\infty)$ taką, że

$$\forall_{\substack{A \in \Sigma_i \\ A \subseteq \Omega_i}} \quad \nu(A) = \int_A f_i \, d\mu \qquad (*)$$

Zdefiniujmy $f_0 := \sum_{i=1}^{\infty} f_i \mathbb{1}_{\Omega_i}$, tzn.

$$f_0(\omega) = f_i(\omega) \quad \text{jeśli} \quad \omega \in \Omega_i$$

Wtedy

$$\forall_{A \in \Sigma} \quad \nu(A) \underset{\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i}{=} \sum_i \nu(A \cap \Omega_i) \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A \cap \Omega_i} f_i \, d\mu =$$

$$\Omega = \bigcup_{i=1} \Omega_i$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int_A f_i \mathbb{1}_{\Omega_i} \, d\mu$$

$$= \int_A \sum_{i=1}^{\infty} f_i \mathbb{1}_{\Omega_i} \, d\mu = \int_A f_0 \, d\mu. \blacksquare$$